

Cuprins

CUVÂNT ÎNAINTE.....	9
INTRODUCERE.....	11
CAPITOLUL 1. Uneltele și fundalul.....	19
CAPITOLUL 2. Un sistem modal normal incomplet.....	49
Remarci asupra validității modale, cadrelor și modelelor.....	49
Sistemul incomplet VB.....	57
Comentarii asupra demonstrației de incompletitudine a sistemului VB.....	76
CAPITOLUL 3. Incompletitudinea modală ca fenomen de ordinul al doilea.....	109
O schiță a logicii de ordinul al doilea.....	113
Lexiconul limbajului logicii de ordinul al doilea.....	116
Sintaxa limbajului logicii de ordinul al doilea.....	118
Semantici pentru limbajul logicii de ordinul al doilea.....	120
Semantica standard pentru limbajul logicii de ordinul al doilea.....	122
Semantica Henkin pentru limbajul logicii de ordinul al doilea.....	124
Reguli de inferență pentru cuantori de ordinul al doilea.....	130
Incompletitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică standard versus completitudinea logicii de ordinul al doilea cu semantică Henkin.....	131
Traducerea canonică a limbajului logicii modale a propozițiilor în limbajul logicii de ordinul al doilea.....	144
Corelarea semanticii modale cu semantica de ordinul al doilea.....	148
O abordare a completitudinii modale prin logica de ordinul al doilea.....	151
Cel de-al doilea argument bazat pe logica de ordinul al doilea pentru existența sistemelor modale complete.....	158
Explicarea incompletitudinii modale prin logica de ordinul al doilea.....	162
CAPITOLUL 4. Este logica de ordinul al doilea o <i>logică</i> ?.....	187
Dezacordurile lui Quine cu logica de ordinul al doilea.....	192
Un argument pentru logica de ordinul al doilea.....	201
Un alt argument (prospectiv) pentru logica de ordinul al doilea.....	215
POSTFAȚĂ.....	229
BIBLIOGRAFIE.....	233
INDEX.....	241

Capitolul 1. Uneltele și fundalul

Scopul meu în această carte este să examinez fenomenul incompletitudinii modale și să-l explic prin intermediul incompletitudinii logicii de ordinul al doilea. De aceea, voi începe prin a schița principalele elemente ale fundalului pe care poate fi dusă până la capăt o înțelegere adecvată a acestei teme.¹

Merită să observăm, mai întâi, că o înțelegere profundă a chestiunilor modale și a grupului de sisteme modale, care fuseseră dezvoltate anterior în mod axiomatic, aproape fără nici o idee despre ce înseamnă ele, nu a putut fi obținută până ce nu a fost formulată o semantică satisfăcătoare pentru limbajele modale la sfârșitul anilor 1950 și începutul anilor 1960, în lucrări datorate în principal lui S. Kripke, S. Kanger, sau J. Hintikka. În mare, ideea acestei abordări semantice (model-teoretice) a limbajelor modale, cunoscută drept "semantica lumilor posibile", este o foarte ingenioasă generalizare a noțiunii de interpretare pentru limbajul logicii (non-modale) de ordinul întâi. Această generalizare poate fi dusă cu succes până la capăt, pentru că strategia pe care o încorporează este aptă să ocolească unele probleme produse de către principalul contrast dintre conectorii propoziționali veri-funcționali și conectorii propoziționali modali: în timp ce primii au o semantică veri-funcțională care conduce destul de ușor și de direct la o definiție formală a adevărului și a validității pentru

¹ Pentru prezentarea fundalului și a elementelor pregătitoare în acest capitol cf. următoarele surse bibliografice principale: Bowen, Kenneth A. *Model Theory for Modal Logic*. Kripke Models for Modal Predicate Calculi, D. Reidel Publishing Company, 1979; Chellas, Brian *Modal Logic. An Introduction*, Cambridge University Press, 1980; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part I - DE RE / DE DICTO Distinction', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 125-126; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part II - The Elimination of DE RE Modality', *Journal of Philosophical Logic* 7 (1978), pg. 277-306; Fine, Kit 'Model Theory for Modal Logic. Part III - Existence and Predication', *Journal of Philosophical Logic* 10 (1981), pg. 293-307; Forbes, Graeme *An Introduction to Modal Logic*, Tulane University, 1994; Hughes, G. E. și M. J. Cresswell *An Introduction to Modal Logic*, Routledge, London - New York, 1968; Hughes, G. E. și M. J. Cresswell *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London - New York, 1984; Hughes, G. E. și M. J. Cresswell *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London - New York, 1996.

formule din acel limbaj, cei din urmă nu au o astfel de semantică. Prin urmare, conectorii modali nu pot fi definiți drept funcționari de adevăr, deoarece nu există nici o funcție de adevăr pe care ei să o exprime. Totuși, dacă putem "împacheta" laolaltă, ca să zicem așa, într-o structură, mai multe interpretări de genul aceleia cerute pentru a face semantica logicii non-modale de ordinul întâi, și dacă structura este dotată cu relații între acele interpretări, atunci putem avea o soluție pentru problema găsirii condițiilor de adevăr ale operatorilor modali, de-a lungul aceluiași linii de construcție ca și acelea ale soluției semantice mai docile pentru conectorii veri-funcționari.

Să notăm pe scurt, acum, că o interpretare \mathcal{I} pentru o secvență în limbajul logicii (non-modale) de ordinul întâi este o pereche $\mathcal{I} = (D, V)$, constând dintr-un domeniu $D = \{o_1, \dots, o_n, \dots\}$ de indivizi și o atribuire V de valori semantice corespunzătoare pentru variabile, predicate și constante individuale. Astfel, \mathcal{I} trebuie să oglindească clauzele sintactice ale definiției recursive ale unei formule bine formate (fbf) și urmează să producă o valoare semantică pentru o fbf φ în funcție de valoarea semantică (respectiv valorile semantice) pe care V le atribuie subformulelor bine formate ale lui φ . Condițiile pe care le satisface V sunt: (i) pentru fiecare constantă individuală a acelui limbaj, și nu pentru alte simboluri, V va atribui o referință care este un individ luat din D ; (ii) pentru fiecare literă-predicat n -adică $\lambda t_1 \dots t_n$, și nu altele, o funcție caracteristică A , astfel încât $A(V(t_1) \dots V(t_n)) = \top$ dacă și numai dacă (dacă) $\langle V(t_1), \dots, V(t_n) \rangle \in V_r(\lambda)$, ceea ce revine la o atribuire de n -tupluri de obiecte din D pentru λ , și anume acelea despre care λ este adevărat în \mathcal{I} ; (iii) pentru fiecare simbol funcțional f de n locuri din acel limbaj, și nu pentru alte simboluri, o funcție f , care este mulțimea tuturor acelor $n + 1$ -tupluri $\langle \langle o_1, \dots, o_n \rangle, o_{n+1} \rangle$ în D astfel încât o_{n+1} este valoarea unică în D a funcției f atunci când n -tuplul

$\langle o_1, \dots, o_n \rangle$ este argumentul lui f ; (iv) pentru fiecare literă-propoziție π în limbaj, și nu altele, o *valoare-de-adevăr*, adevărul (\top) sau falsul (\perp), dar nu amândouă; (v) V explicitează clauzele semantice obișnuite pentru vocabularul logic al limbajului, viz. definițiile din tabelele de valori de adevăr pentru conectorii propoziționali și dă o explicitare semantică pentru cuantificatori.

Ideea fundamentală a generalizării acestui tip de interpretare pentru limbajul logicii de ordinul întâi la un limbaj modal de ordinul întâi se bazează pe abordarea semantică a operatorilor modali în calitate de cuantificatori ai unui domeniu de entități specifice, numite lumi posibile. Astfel, operatorul necesității (simbolizat prin ' \square ') se comportă precum un cuantificator universal al cărui domeniu este domeniul lumilor, iar operatorul posibilității (' \diamond ') este interpretat drept cuantificator existențial. Pe scurt, a da o interpretare pentru o secvență în limbajul logicii modale a predicatelor înseamnă să stipulăm o mulțime de lumi, structurată printr-o relație diadică, fiecare lume fiind un model de genul lui \mathcal{I} de mai sus. Astfel, într-un anumit sens, atunci când construim o semantică modală, avem nevoie de "mai multe entități" (lumi) de genul acelor de care avem nevoie atunci când construim semantica logicii nemodale de ordinul întâi, deoarece fiecare lume îndeplinește sarcina unei interpretări \mathcal{I} care este cerută în cazul nemodal. Efectul modal al lui ' \square ' și respectiv ' \diamond ' este dat de evaluarea formulei care se află în domeniul operatorului modal la toate lumile, respectiv la unele lumi, care se află într-o anumită relație cu lumea la care trebuie evaluată formula modală inițială.

Deoarece fenomenul incompletitudinii modale apare în logica modală a propozițiilor, nu există nici un motiv special pentru a intra în detaliile teoriei

modelelor pentru limbajul logicii modale a predicatelor. Prin urmare, din interpretarea \mathcal{I} specificată mai sus trebuie să reținem numai acea clauză care reglementează atribuirile de valori de adevăr literelor-propoziție și clauzele de evaluare obișnuite pentru conectorii propoziționali în interpretări. Pentru a construi un model pentru secvențe modale în limbajul logicii modale a propozițiilor (LLMP) vom avea nevoie de o mulțime (structurată de către o relație) de mai multe interpretări de genul celor cerute în cazul nemodal.

Astfel, limitându-ne doar la cazul modal propozițional, o interpretare sau un *model* \mathcal{M} al unei secvențe în LLMP va fi un triplet $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, unde $W_{\mathcal{M}}$ este o mulțime de lumi; $R_{\mathcal{M}}$ este o relație binară pe mulțimea $W_{\mathcal{M}}$ astfel încât pentru fiecare w_i și w_j , $i, j \in \mathbb{N}$, $\langle w_i, w_j \rangle \in R_{\mathcal{M}}$ ddacă w_i stă în relația $R_{\mathcal{M}}$ cu w_j , iar $R_{\mathcal{M}}$ satisface anumite condiții care vor fi prezentate mai târziu; și $V_{\mathcal{M}}: II \rightarrow \wp(W)$ este o funcție care este definită pentru fiecare literă-propoziție $\pi \in II$ din limbaj și ia valori în mulțimea tuturor submulțimilor lui $W_{\mathcal{M}}$, atribuind pe această cale fiecărei litere-propoziție π o submulțime de lumi din $W_{\mathcal{M}}$ (intuitiv, acele lumi la care π este adevărată); astfel, $V(\pi) \in \wp(W_{\mathcal{M}})$.

În termenii acestui aparat putem defini acum conceptele *formulă adevărată la o lume* w într-un model \mathcal{M} , și de *formulă validă în \mathcal{M}* . Astfel, adevărul unei formule la o lume într-un model este definit inductiv prin intermediul conceptului relației de satisfacere ' \models ' (a se citi: 'satisface'), i. e. $\models \subseteq (\mathcal{M}, w) \times \text{Sent (LLMP)}$. Așadar, satisfacerea ține între formule și modele și este cea mai mică relație care întrunește condițiile:

pentru fiecare literă-propoziție π în LLMP, $(\mathcal{M}, w) \models \pi$ ddacă $w \in V_{\mathcal{M}}(\pi)$;

pentru fiecare fbf-uri Φ și Ψ în LLMP,

$$(\mathcal{M}, w) \models \sim \Phi \text{ ddacă } (\mathcal{M}, w) \not\models \Phi;$$

$$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \& \Psi \text{ ddacă } (\mathcal{M}, w) \models \Phi \text{ și } (\mathcal{M}, w) \models \Psi;$$

$$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \vee \Psi \text{ ddacă } (\mathcal{M}, w) \models \Phi \text{ sau } (\mathcal{M}, w) \models \Psi; \text{ și}$$

$$(\mathcal{M}, w) \models \Phi \rightarrow \Psi \text{ ddacă } (\mathcal{M}, w) \not\models \Phi \text{ sau } (\mathcal{M}, w) \models \Psi;$$

pentru fiecare fbf Φ în LLMP,

$$(\mathcal{M}, w) \models \Box \Phi \text{ ddacă } (\forall u \in W_{\mathcal{M}})(\text{dacă } R_{\mathcal{M}} w u \text{ atunci } (\mathcal{M}, u) \models \Phi);$$

pentru fiecare fbf Φ în LLMP,

$$(\mathcal{M}, w) \models \Diamond \Phi \text{ ddacă } (\exists u \in W_{\mathcal{M}})(R_{\mathcal{M}} w u \text{ și } (\mathcal{M}, u) \models \Phi).$$

Conceptul definit mai sus ne permite să introducem acum conceptul unei formule Φ valide într-un model $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$ ca fiind acea formulă Φ care este adevărată la fiecare lume w în $W_{\mathcal{M}}$; astfel, $\models_{\mathcal{M}} \Phi$ ddacă $\forall w \in W_{\mathcal{M}} (\mathcal{M}, w) \models \Phi$.

Totuși, principalul concept de validitate care va prezenta interes pentru noi în această monografie nu este acela al unei formule valide într-un model. De fapt, conceptul de validitate poate fi rafinat mai departe și aceasta se va dovedi că are consecințe importante pentru chestiunea pe care o examinăm aici, viz. sisteme modale complete vs. sisteme modale incomplete. O noțiune de formulă validă care cu siguranță că este foarte atrăgătoare în general - și la un nivel intuitiv - este aceea de formulă adevărată, indiferent de valorile de adevăr atribuite literelor-propoziție (variabilelor, în alte versiuni) ale acelei formule de către interpretările tuturor literelor-propoziție din formulă. Recunoaștem aici noțiunea comună de validitate ca adevăr în toate interpretările posibile ale literelor-propoziție care figurează în structura unei formule. Omologul modal al conceptului nemodal de interpretare pentru literele-propoziție

este tripletul $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Așadar, a spune că o formulă modală Φ este validă potrivit acestei noțiuni de validitate înseamnă a spune că Φ este adevărată indiferent de valorile atribuite fiecărei litere-propoziție π în Φ de către componenta $V_{\mathcal{M}}$ a lui $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Atunci când interesul nostru se focalizează asupra acestei noțiuni de validitate, putem ignora funcția de valorizare $V_{\mathcal{M}}$ și în felul acesta rămânem doar cu componenta $(W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}})$ a tripletului $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$. Prin urmare, grație acestei noțiuni comune de validitate pentru o formulă modală în LLMP suntem conduși la un concept metalogic foarte important pentru sistemele modale și anume conceptul de *cadru (frame)*.

Un *cadru* \mathcal{L} este o pereche care constă dintr-o mulțime de lumi și o relație binară pe acea mulțime, i. e. $\mathcal{L} = (W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}})$. Dacă $\mathcal{M} = (W_{\mathcal{M}}, R_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}}) = (\mathcal{L}_{\mathcal{M}}, V_{\mathcal{M}})$, spunem că *Meste bazat pe cadrul* \mathcal{L} și că \mathcal{L} este *cadrul* lui \mathcal{M} .

Bazându-ne pe acest concept nou, putem extinde acum definiția unei formule modale valide astfel: Φ se va spune că este validă într-un cadru $\mathcal{L} = (W_{\mathcal{L}}, R_{\mathcal{L}})$ ddacă pentru fiecare model \mathcal{M} bazat pe \mathcal{L} și pentru fiecare w în fiecare astfel de model, $(\mathcal{M}, w) \models \Phi$.

Este bine să ne oprim aici și să remarcăm că există o deosebire importantă între cele două concepte introduse până acum, viz. conceptul de formulă validă într-un model și conceptul de formulă validă într-un cadru. De fapt, numai conceptul din urmă captează ideea intuitivă care se află în spatele validității ca adevăr, indiferent de valorile de adevăr atribuite părților atomare ale unei formule. Căci, așa cum se poate vedea cu ușurință, potrivit primei noțiuni, chiar și o literă-propoziție poate fi formulă validă, dacă modelul în care este evaluată validitatea sa se întâmplă să conțină numai

lumi la care acea literă-propoziție este adevărată. Morala aici este că dacă vrem ca validitatea să însemne adevăr pentru fiecare interpretare a literelor-propoziție ale unei formule, atunci noțiunea de validitate într-un model, sau chiar într-o clasă de modele care au o anumită caracteristică, nu ne va fi de nici un folos. Pentru că acea noțiune nu va capta ideea intuitivă în toate modelele.

Aceeași idee a paragrafului anterior poate fi reformulată și sub forma observației importante că validitatea într-un model nu este conservată de către toate regulile unui sistem modal normal S . Pentru a înțelege de ce stau lucrurile așa trebuie să facem clară noțiunea de sistem modal normal. Astfel, ceea ce înțelegem printr-un sistem modal normal este exact o colecție de formule ale unui limbaj al logicii modale. Fiecare membru al unei astfel de colecții (sistem) S este o teoremă a lui S . Un sistem modal S este denumit *normal*, dacă S poate fi specificat în felul următor: (i) S conține ca teoreme toate formulele valide ale limbajului logicii (nemodale) a) propozițiilor; (ii) S conține formula modală **K** (denumire care a fost aleasă în onoarea lui Kripke) $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$, care este unica secvență-axiomă a celui mai slab sistem modal propozițional normal **K**; (iii) S are următoarele trei reguli de transformare, care produc teoreme noi ale lui S din teze anterior existente în S :

Substituția Uniformă (SU): dacă σ este o teoremă a lui S , tot așa este fiecare instanță-substituție a lui σ ,

Eliminarea Condiționalului, i. e. $\rightarrow E$ (sau modus ponens): dacă $\vdash_S \sigma \rightarrow \tau$ și $\vdash_S \sigma$, atunci $\vdash_S \tau$, și

Necesitarea (N): dacă $\vdash_S \sigma$, atunci $\vdash_S \Box \sigma$.

Sisteme modale propoziționale normale bine-cunoscute, care sunt extinderi ale sistemului **K**, sunt sistemele **T**, **S4**, **B**, **S5**. Sistemul **T** este **K** + axioma (**T**) $\Box A \rightarrow A$,

S4 este $T + (4) \Box A \rightarrow \Box \Box A$ (sau, altfel spus, **KT4**), B este $T + (B) A \rightarrow \Box \Diamond A$ (sau altfel **KTB**) și S5 este $T + (E) \Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ (sau altfel **KTE**).

Să revenim acum la remarca potrivit căreia validitatea într-un model nu este conservată de către toate regulile unui sistem modal normal S. Pentru a justifica această afirmație este suficient să se observe că dintre regulile de transformare ale oricărui sistem modal normal S, numai $\rightarrow E$ și N au capacitatea de a conserva validitatea într-un model. În timp ce SU nu are această capacitate. Pentru a vedea această să notăm că dacă ceea ce se înțelege prin validitate este 'adevăr în fiecare lume w a unui (unic) model \mathcal{M} ', atunci, potrivit acestei definiții a validității, instanța-substituție (**T'**), viz.

$$(T') \Box B \vdash_T B$$

a axiomei-T

$$(T) \Box A \vdash_T A,$$

poate fi nevalidă, chiar dacă T însăși este validă în \mathcal{M} . Fie $\mathcal{M} = (W, R, V)$ un model definit de către condițiile $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{\langle w_1, w_2 \rangle\}$ și $(\mathcal{M}, w_1) \models A$, $(\mathcal{M}, w_1) \not\models B$, $(\mathcal{M}, w_2) \models A$, $(\mathcal{M}, w_2) \models B$. Nu este greu să se vadă că T este adevărată în w_1 și w_2 , și că este prin urmare validă în \mathcal{M} , deoarece nici nu este cazul că $(\mathcal{M}, w_1) \models \Box A$ și $(\mathcal{M}, w_1) \not\models A$, și nici nu este cazul că $(\mathcal{M}, w_2) \models \Box A$ și $(\mathcal{M}, w_2) \not\models A$. Totuși, T' este nevalidă în \mathcal{M} deoarece $(\mathcal{M}, w_1) \models \Box B$, întrucât w_1 vede doar pe w_2 și $(\mathcal{M}, w_2) \models B$, dar cu toate acestea $(\mathcal{M}, w_1) \not\models B$.

Este foarte firesc să se considere atunci că nu putem folosi în nici un fel această noțiune de formulă validă într-un model. Totuși, lucrurile nu stau așa. Pentru că acest concept se dovedește a fi foarte util în investigația metalogică a *completitudinii* sistemelor modale cu privire la clasa cadrelor care caracterizează sistemele. Dar pentru a-i dovedi utilitatea, conceptul de formulă validă într-un model trebuie asociat cu un tip foarte special de model, care este denumit *model canonic*. Ne vom întoarce la această chestiune de îndată.

Înainte de a examina mai departe această chestiune preliminară, aș vrea să adaug încă un cuvânt privitor la motivația subiacentă prezentării 'uneltelor și a fundalului' în felul în care am făcut-o aici. Rațiunea urmării acestei linii de argumentare nu este numai aceea că astfel se poate arăta că principalele concepte metalogice necesare pentru a face metateoria logicii modale 'cresc' din conceptele folosite în logica nemodală de ordinul întâi, deși acest fel de a aborda lucrurile ne va permite accesul la înțelesul acestor concepte modale și la aparatul semanticii modale într-un fel mai propriu și mai lesnicios. Rațiunea în cauză este totodată aceea că abordarea acestei chestiuni pe calea similarităților dintre limbajul modal și cel al logicii predicatelor este foarte utilă și promițătoare pentru înțelegerea limbajului modal, în interpretarea dată, ca fiind *izomorfic* cu limbajul logicii de ordinul al doilea. Punctul central al acestei remarci, a cărei forță va emerge cu putere mai târziu în această carte, este că pentru fiecare propoziție în LLMP poate fi construită o propoziție corespunzătoare în limbajul logicii de ordinul al doilea, în așa fel încât cea dintâi este adevărată în interpretarea modală dacă și numai dacă cea din urmă este adevărată într-o interpretare de ordinul al doilea care corespunde – într-un sens care va fi făcut precis mai târziu - interpretării modale, care face adevărată propoziția modală inițială.